dev : Théorème d'Hadamard Lévy.

Leçons : 203, 204, 206, 214
Réf : Bernis p 40.
Thm : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$. LASSE : i) f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.
ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $D_x f$ est inversible et $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$

dem :

Toutes

① i) ⇒ ii)
Supposons i)
* $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad D_{f(x)} f^{-1} \circ D_x f = id_{\mathbb{R}^n}$.

$D_{f(x)} f^{-1}$ est donc inversible à gauche et comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, il est inversible.

et $D_x f$ a.l

L206 insister.

* Soit $R > 0$.
$f^{-1}(\overline{B(0,R)}) = (f^{-1})(\overline{B(0,R)})$ car f est un difféomorphisme.
$f^{-1}(\overline{B(0,R)})$ est donc compact, ainsi $f^{-1}(\overline{B(0,R)}) \subset \overline{B(0,A)}$ (car borné de $\mathbb{R}^n$)
Par passage au complémentaire, on obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| > A \Rightarrow \|f(x)\| > R.$$

Donc $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$

② ii) ⇒ i) :
Supposons ii). OPS $f(0) = 0$ (quitte à remplacer f par $f - f(0)$)

que 203

a) Surjectivité : (inverse à droite).
Soient : * I un intervalle contenant 0 et 1.
* $s : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application dérivable par rapport à sa 1ère variable

1) écrire expliquer puis int

$$f \circ s(t,x) = tx \ (*) \iff \begin{cases} D_{s(t,x)} f \circ \partial_t s(t,x) = x & \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n \\ f \circ s(0,x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n & \partial_t s(t,x) = (D_{s(t,x)} f)^{-1}(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}^n & s(0,x) \in f^{-1}(\{0\}) \end{cases}$$

ok par hypothèse

On pose $F : (x,y) \mapsto (D_y f)^{-1}(x)$
s vérifie (*) si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, s est solution du problème de Cauchy à paramètre :

$$(C) \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = F(x, s(t,x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

($0 \in f^{-1}(\{0\})$ par OPS $f(0)=0$)

F est $\mathcal{C}^1$ donc par le théorème de Cauchy :
pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique solution maximale de (C) définie sur $]t^-(x), t^+(x)[$ qu'on note $s(\cdot, x)$.

1) F $\mathcal{C}^1$: composée d'app° $\mathcal{C}^1$: $(x,y) \mapsto x$ ou y $\mathcal{C}^1$ (proj° a.l.)
$y \mapsto D_y f$ $\mathcal{C}^1$ = f $\mathcal{C}^2$
$A \mapsto A^{-1}$ $\mathcal{C}^1$ = admis.
$A, x \mapsto A(x)$ $\mathcal{C}^1$ bil° dim finie.

2) Thm Cauchy : $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ localt lipschitz 2e var

• Mq $t^+(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons par l'absurde $t^+(x_0) \leq 1$.
Par le principe de sortie de tout compact $\lim_{t \to t^+(x_0)} \|s(t,x_0)\| = +\infty$.
donc $\lim_{t \to t^+(x_0)} \|f \circ s(t,x_0)\| = +\infty$.
Or $\|f \circ s(t,x_0)\| = |t| \|x_0\| \xrightarrow{t \to t^+(x_0)} t^+(x_0) \|x_0\| < +\infty$ ↯.
Donc $t^+(x) > 1$.

p. 2 pas faire autre que L203

Ainsi $s_1 := s(1,.)$ est bien définie et est inverse à droite de f.
De plus, par le thm de Cauchy à paramètre on a s_1 $\mathcal{C}^1$.
Ceci montre que f est surjective.

b) Injectivité (s_1 surjective).

* Montrons que $s_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ — par arg I connexité.

• fermée:

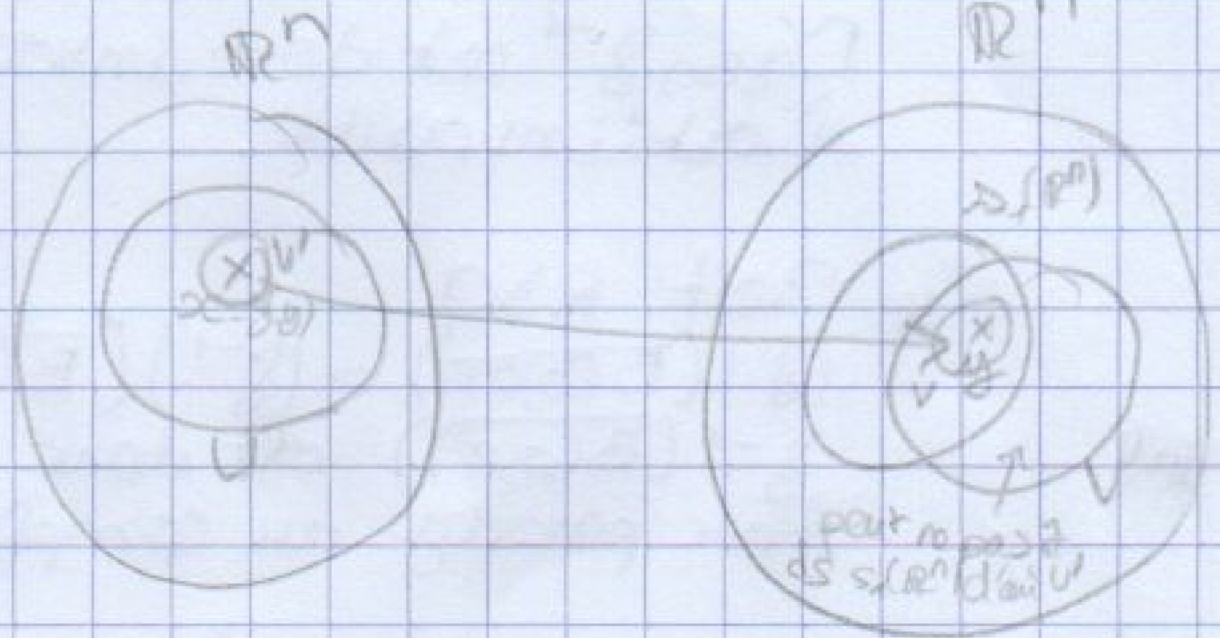
Soit $(s_1(x_k))_{k\geq 0}$ une suite de $s_1(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$.

d'une part: $\lim_{k\to+\infty} f\circ s_1(x_k) = f(y)$ par continuité de f.

d'autre part: $\lim_{k\to+\infty} f\circ s_1(x_k) = \lim_{k\to+\infty} x_k$

et par continuité de s : $y = \lim_{k\to+\infty} s(x_k) = s_1(f(y)) \in s_1(\mathbb{R}^n)$

D'où $s_1(\mathbb{R}^n)$ est fermée.



• ouvert:

Soit $y \in s_1(\mathbb{R}^n)$.
$\exists x \in \mathbb{R}^n$, $y = s_1(x)$.
$f(y) = x$.

→ f est $\mathcal{C}^1$ et $D_y f$ inversible donc par le TIL, il existe :
* un voisinage U de x
* un voisinage V de y.

tels que f induit un $\mathcal{C}^1$ difféo $\phi : V \to U$.

→ Comme s_1 est continue il existe un voisinage $U' \subset U$ de x tq $s_1(U') \subset s_1(\mathbb{R}^n)$.

Mq $s_1(U')$ ouv. → $s_1(U') = \phi^{-1}(\phi(s_1(U'))) = \phi^{-1}(U')$ ouvert.

Donc $s_1(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.

pas faire pas time.

• Injectivité :

Soient $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ tq $f(y_1) = f(y_2)$
$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ $s_1(x_1) = y_1$ et $s_2(x_2) = y_2$.
$f(s_1(x_1)) = f(s_1(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$
d'où $y_1 = s_1(x_1) = s_1(x_2) = y_2$.

dim finie : aP dim finie : inv à gauche ⇒ inv.
$f\circ g = id$ ⇒ f surj et g inj
dim $<\infty$ thm du rg : $\dim(\ker(g)) = n-n=0$ ⇒ g inj
$\dim(\mathrm{Im}(g)) = n-0 = n$ ⇒ g surj.